Instituto Politécnico

niversidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Ingreso Terciario

Cód. 1701-19

Matemática

Dpto. de Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

LOS NÚMEROS REALES

EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES.

Es probable que el hombre primitivo, en una primera etapa del desarrollo de su capacidad de abstracción, solo haya advertido la diferencia entre la unidad y la multiplicidad.

Luego, intentando resolver problemas que la naturaleza le planteaba aprendió a "contar". Con esto, en un origen, no muy preciso surgieron los llamados ***números naturales***, al conjunto de los cuales indicamos con N y cuyos elementos escribimos bajo la representación indo-arábiga, es decir:

N = {1; 2; 3; ...}

La necesidad de asignar un número al conjunto vacío dio origen al cero, surgiendo en consecuencia

$$N_0 = N \cup \{0\} = \{0; 1; 2; ...\}$$

que es el conjunto de los ***números naturales y el cero.***

Al trabajar en N_0 aparecen cuestiones que carecen de solución. Así, dados p y q $\in N_0$ no siempre es posible hallar $x \in N_0$, porque si $q + x = p \Rightarrow x = p - q$ con $p < q$

Para resolver esa situación aparece el conjunto de los Números Enteros que simbolizamos con Z y lo indicamos:

$$Z = \{... -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$$

Así, dados $p \in Z$ y $q \in Z - \{0\}$ no siempre es posible hallar $x \in Z$ tal que: $q.x = p$, lo que surge naturalmente de no poder resolver en Z, divisiones del tipo $p : q$ cuando p no es múltiplo de q.

Para resolver esa cuestión se crea el conjunto de los ***números racionales*** que indicamos con Q y definimos como:

$$Q = \left\{ x / x = \frac{p}{q} \text{ con } p \in Z \text{ y } q \in Z - \{0\} \right\}$$

Q del inglés *quotient* que significa ***cociente***

Es decir, en Q están los números que escribimos como "fracción" con numerador en Z y denominador en $Z-\{0\}$.

Sin embargo, no todo resulta posible en Q, surgiendo un nuevo problema cuya solución no se consigue en Q.
¿Cuál es el número x tal que $x^2 = 2$?
Como ya sabemos puede probarse que ningún número de la forma $\frac{p}{q}$ resuelve esa ecuación.
A partir de tal cuestión y con el objeto de "crear" números que la resuelvan surge

I = {números irracionales}

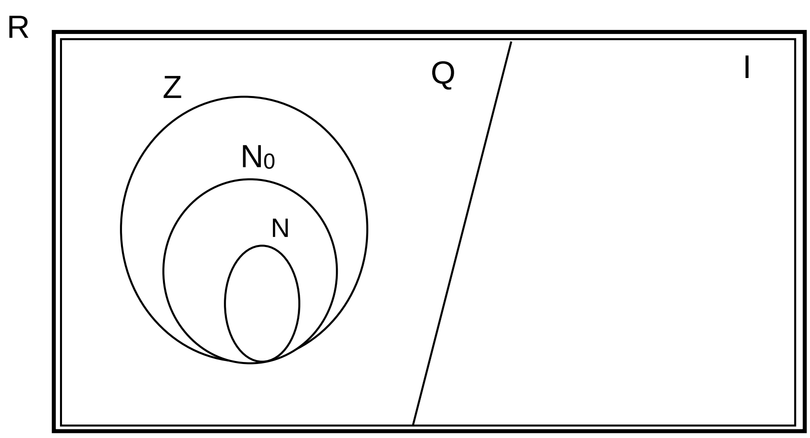
En **I** están aquellos números que no se pueden escribir en forma de "fracción", como por ejemplo $\pi;\ \sqrt{2};\ \sqrt{3}$ entre otros.

Entonces, a partir de los conjuntos anteriores, resulta un nuevo conjunto, llamado conjunto de los **números reales** y simbolizado con R

$$\boxed{\mathrm{R} = \mathrm{Q} \cup \mathrm{I}}$$

Este conjunto será nuestro objeto de estudio.

En el siguiente diagrama se muestra la relación entre los conjuntos numéricos **R, Q, I, Z, N_0, N**



Actividades

1) Indica si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justifica tu respuesta.

   a) 0 es un número racional

   b) $R^{+} \bigcup R^{-} = R$

   c) Todo número real no racional es irracional.

   d) $\frac{8}{2}$ no es natural.

   e) $\frac{a}{a} = 1$

   f) Existen números reales tales que su cuadrado es igual a 12

   g) –3,5 es irracional

   h) $x \in Q \Rightarrow x \in R$

   i) La medida de la diagonal de un rectángulo de lados 3 y 4 es un número racional

2) ¿Cuál de las siguientes expresiones es falsa? ¿Por qué?

   a) La medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es siempre irracional.

   b) Existe un cuadrado de área 2 cuyo lado sea un número racional.

   c) $0 \in (I \bigcap Q)$

   d) Todo número racional es un número real.

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON LOS NÚMEROS REALES

Suma y multiplicación

En R, la suma y la multiplicación gozan de las siguientes propiedades. Consideramos $\forall\ a; b; c \in R$

SUMA

- Ley de cierre
  $(a+b) \in R$
- Conmutativa
  $a+b=b+a$
- Asociativa
  $(a+b)+c=a+(b+c)$
- Existencia del elemento neutro
  $a+0=a$
- Existencia del opuesto
  $\forall a\ \exists\ b / a+b=0$
  b es el opuesto de a
  $b=-a$

MULTIPLICACIÓN

- Ley de cierre
  $a.b \in R$
- Conmutativa
  $a.b=b.a$
- Asociativa
  $(a.b).c=a.(b.c)$
- Existencia del elemento neutro
  $a.1=a$
- Existencia del recíproco
  $\forall a \neq 0\ \exists b / a.b=1$
  b es el recíproco de a
  $b=\dfrac{1}{a}$

- Distributiva de la multiplicación respecto de la suma
  $$a.(b+c)=a.b+a.c$$
  $\longrightarrow$ *Transforma multiplicaciones en sumas*
  $\longleftarrow$ *Transforma sumas en multiplicaciones (Factoreo)*

Resta

Definición:

$$\forall a;b;c \in R \qquad a-b=c \Leftrightarrow a=b+c$$

Algoritmo de la resta

$$c=a+(-b)$$

División

Definición

$$\forall a;b \in R\ ;\ b \neq 0 \qquad a : b = c \Leftrightarrow a = b.c$$

Algoritmo de la división

$$c = a.\frac{1}{b} \qquad b \neq 0$$

Actividad

3) Indica en cada caso si la igualdad dada es correcta o incorrecta.

a) $6 + 4 : 2 = (6 + 4) : 2$

b) $6 : 2 + 4 : 2 = (6 + 4) : 2$

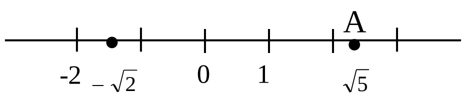
c) $(2 + 3)^2 = 2^2 + 3^2$

REPRESENTACIÓN EN EJE REAL

Existe una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de una recta en la que se haya fijado un origen y una unidad de medida (eje real)

- A cada número real corresponde un punto del eje real y recíprocamente a cada punto del eje real le corresponde un número real.

Así:



- Decimos que a $\sqrt{5}$ corresponde A o que a A le corresponde $\sqrt{5}$, escribimos A ($\sqrt{5}$) y leemos A tiene por **abscisa** $\sqrt{5}$

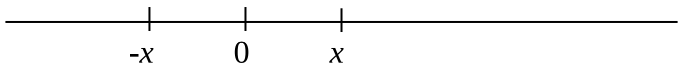
VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL

Llamamos **valor absoluto** de un número real x y simbolizamos $|x|$, a la distancia de ese número al origen en el eje real.

Es decir

$$x \in R,\ |x| = d(x\,;0)$$

Obviamente de esta definición surge que existen dos números cuyas distancias al origen es la misma: **el número y su opuesto**



Podemos decir que:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Conjunto Z de los números enteros es:
$x \in Z \Leftrightarrow |x| \in N_0$

EXPRESIÓN DECIMAL DE UN NÚMERO REAL

Todo número real tiene una forma decimal de representación que se diferencia según sea un número racional o un número irracional.

- La expresión decimal de su número racional tiene infinitas cifras decimales "periódicas".
  Por ejemplo:

$$\frac{4}{3} = 1{,}333\ldots = 1{,}\overline{3} \qquad \frac{5}{2} = 2{,}5000\ldots = 2{,}5\overline{0} = 2{,}5$$

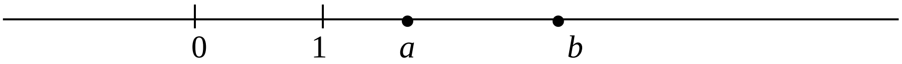
- La expresión decimal de un número irracional tiene infinitas cifras decimales "no periódicas"

  - $\pi = 3{,}141592\ldots$
  - 1.23456...
  - $-\sqrt{2} = -1{,}414213\ldots$

RELACIÓN DE ORDEN

Decimos que un número real es **menor o igual** que otro si el punto representativo del primero en el eje real, se encuentra a la izquierda o coincide con el punto representativo del segundo.

Así:



$a \leq b$ y leemos a es menor o igual que b

Naturalmente: $a \leq b \Rightarrow b \geq a$

Actividades

4) Te informan que $a.b = a$. ¿Cuáles son los valores posibles de a y de b?

5) $a.b = 0$, $a + b = 8$, $b \neq 0$. Calcula a y b.

6) Completa las siguientes implicaciones.

i) $\left.\begin{matrix} xy > 0 \\ y > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

iv) $\left.\begin{matrix} x + y < 0 \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

ii) $\left.\begin{matrix} x\,y < 0 \\ y < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

v) $\left.\begin{matrix} x + y > 0 \\ y < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

iii) $x\,y < 0 \Rightarrow$

vi) $x + y = 0 \Rightarrow$

7) Enuncia coloquialmente las siguientes propiedades y ejemplifica.

i) $-a = (-1)a$

ii) $-(a + b) = (-a) + (-b)$

iii) $-(-a) = a$

iv) $(-a)(-b) = ab$

vi) $\dfrac{1}{\frac{1}{a}} = a \;;\; \forall a \neq 0$

v) $\forall a \neq 0;\ \forall b \neq 0;\ \dfrac{1}{ab} = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b}$

vi) $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}; \forall b \neq 0$

8) Establece si cada una de las siguientes afirmaciones es **verdadera** o **falsa**, justificando tu respuesta

a) Todo número real tiene un recíproco

b) El recíproco de $\left(-\frac{2}{5}\right)$ es $\left(-\frac{5}{2}\right)$

c) El opuesto de 5 es $\frac{1}{5}$

d) $2.(a.b)=(2a).(2b)$

e) $-x+y=y-x$

f) $\frac{x+2}{2}=\frac{x}{2}+1$

g) $\frac{4}{2}$ no es un entero positivo

h) Todo entero es positivo o negativo

i) Existe un número real x tal que $x^2+1=0$

j) Existe más de un número real que verifica $x^2-4=0$

k) Si $|x|=2{,}5 \Rightarrow x=2{,}5$

9) Expresa algebraicamente y halla el valor numérico de la expresión que se obtenga para $a=\frac{1}{2}$; $b=0$; $c=\frac{3}{4}$

i. A la mitad del cuadrado de a sumarle un tercio de la suma de b y c

ii. A la suma de a y c multiplicarla por el cuadrado de a.

iii. A un cuarto de b sumarle $\frac{1}{3}$ del quíntuplo de b.

10) Se sabe que a es un número real que verifica $a \le (-2)$ ¿Qué números del conjunto dado están representados por a ?. Márcalos con una cruz.

$$\left\{-3;\ \sqrt{2};\ -0{,}5;\ \frac{1}{3};\ -\frac{5}{2};\ -2;\ -1{,}5;\ -100\right\}$$

11) Representa en sucesivos ejes reales el conjunto de valores de la variable que hace cierta cada proposición:

a) $x < (-2)$

b) $x \geq (-2)$

c) $x \geq \frac{2}{3}$

d) $x < 0$

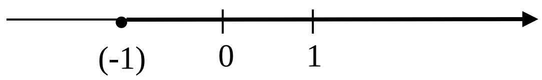
e) $(-1) < x < 1$

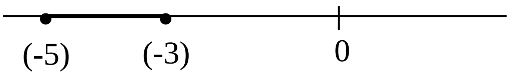
f) $(-2) \leq x \leq \left(+\frac{3}{2}\right)$

g) $(-1{,}5) \leq x < (-0{,}5)$

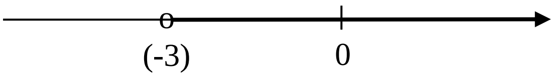
> ***Observación:***
> En *R* se mantiene la definición de la relación "**entre**" dada en R_0^+, o sea:
> Dados a,b y c $\in$ R, *a* < *b* :
> *c* está **entre** *a* y *b* si *a* < *c* y *c* < *b*
> Notamos:
> $$a < c < b$$

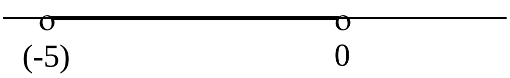
12) Escribe utilizando desigualdades, el conjunto de números representado en cada eje

a)


b)


c)


d)


e)


13) Representa en el eje real posibles números a, b, y c que verifiquen simultáneamente las condiciones indicadas en cada caso.

a) $a \not> b$ y $c > b$

b) $c > a$ y $a \leq b$

c) $0 < a \leq b$ y $c < 0$

14) ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta

a) Si un número a es no negativo, entonces su simétrico respecto del número 1 es negativo.

b) $a \leq b, \quad b \leq a \;\Rightarrow a = b$

c) $a \geq b, \;\; a < 0 \;\Rightarrow\; b < 0$

d) $a \leq b \leq c, \;\; c < 0 \;\Rightarrow a < 0$

15) i) Determina cuál es el signo (<; > ó =) que corresponde colocar entre los siguientes pares de números

a) $|-8|.............|3|$

b) $|8|.............|-3|$

c) $|2{,}5|..........|-2{,}5|$

d) $|-2|..........|-4|$

ii) Expresa, en cada caso, en términos de distancia, el significado de cada relación.

16) Completa con las palabras: **es mayor que** o **es menor que** según corresponda

- $a > 0 \;\wedge\; b > 0 \;\wedge\; |a| > |b| \;\Rightarrow\; a.............................\; b$

En palabras:

De dos números positivos, el que tiene mayor valor absoluto es ………… que el que tiene menor valor absoluto

- $a < 0 \;\wedge\; b < 0 \;\wedge\; |a| > |b| \;\Rightarrow\; a...............................b$

En palabras:

De dos números negativos, el que tiene mayor valor absoluto es ………………… que el que tiene menor valor absoluto

17) Indica en cada apartado, el o los valores de **a**

a) En el eje real la distancia al origen de un número negativo **a** es 1,378

b) El valor absoluto de **a** es $\sqrt{2}$

18) Escribe cada una de la siguientes expresiones en términos de distancia y representa en el eje real los números x que la verifican:

a) $|x| = \dfrac{3}{2}$

b) $|x| \leq 2$

c) $|x| < 2{,}5$

d) $|x| \geq \dfrac{3}{2}$

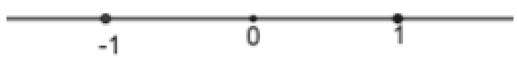
e) $|x| > \dfrac{9}{4}$

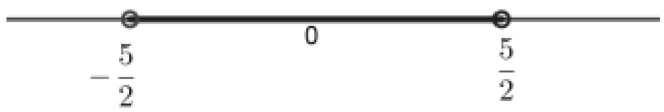
f) $|x| > 0$

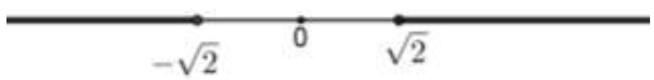
g) $x \in Z \;\; y \;\; |x| < 5$

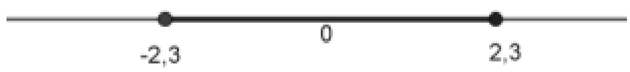
h) $x \in Z$ y $2 < |x| \leq 5$

19) Empleando la simbología de valor absoluto escribe la igualdad o la desigualdad que verifican los números x representados en cada eje real.

a)


b)


c)


d)


POTENCIACIÓN

Es importante notar que la potenciación expresa una multiplicación de factores iguales.

Por ejemplo productos del tipo:

5.5.5; 3.3.3.3; 0.0.0.0.0

se expresan respectivamente

5^3; 3^4; 0^5

en los que suele llamarse ***base*** al factor que se multiplica reiteradamente y ***exponente*** al número de veces que se multiplica ese factor.

Sin embargo, es necesario plantear una definición que involucre todas las situaciones que pueden darse cuando la base es un número real cualquiera y el exponente un entero cualquiera.

$$a^n = \begin{cases} \overbrace{a.a.a.......a}^{n\ \text{factores}} & \text{si } n > 1 \ ; \ n \in N \\ a & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \ ; \ a \neq 0 \\ \dfrac{1}{a^{-n}} & \text{si } n < 0 \ ; n \in Z \ ; a \neq 0 \end{cases}$$

Son ejemplos de potencias:

- $(-2)^5 = (-2).(-2).(-2).(-2).(-2) = -32$
- $\left(-\sqrt{2}\right)^0 = 1$
- $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^3 = \dfrac{125}{27}$
- $1^{40} = 1$

La potenciación goza de propiedades que pueden demostrarse a partir de la definición propuesta y que son:

a) Propiedad distributiva de la potenciación

- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $(a : b)^n = a^n : b^n; \ b \neq 0$

b) Producto de potencias de igual base

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Cuadrados perfectos

El cuadrado de un número natural es otro número natural llamado "cuadrado perfecto". Así, por ejemplo, son cuadrados perfectos:

$$\begin{array}{ccc} 16; & 25; & 144 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4^2 & 5^2 & 12^2 \end{array}$$

c) Cociente de potencias de igual base

$$a^n : a^m = a^{n-m}; \quad a \neq 0$$

d) Potencia de otra potencia

$$\left(a^n\right)^m = a^{n.m}$$

- Te proponemos como problema probar alguna de ellas.

La potenciación resulta un instrumento muy útil para escribir números muy grandes o muy pequeños

Tales como por ejemplo:

- el volumen aproximado de los océanos que se estima en 1 300 000 000 000 000 000 de litros
- el radio de un electrón que se estima en 0,000 000 000 000 004 m

Para poder expresar con facilidad números de esta naturaleza resulta útil la potencia ya que permite introducir lo que llamamos **notación científica** y que consiste en escribir cualquier número de la forma

$$x = a.10^n; \ \text{con} \ \ 1 \leq a < 10 \ \ \text{y} \ \ n \ \ \text{entero}$$

Para los ejemplos anteriores resulta que

- ✓ 1 300 000 000 000 000 000 = $1,3 .10^{18}$
- ✓ 0,000 000 000 000 004= 4.10^{-15}

Actividades

20) Calcula cada valor para n = 1; 3 y (-3)

a) $\left(n + \dfrac{1}{n}\right)^n$

b) $\left(n^2 - n + 1\right)^2$

c) $4^{\frac{3}{n}}$

d) $\left|\dfrac{1}{n}\right|^{n-3}$

21) Calcula expresando el resultado en la forma que muestra el ejemplo

Ejemplo: $\frac{3^3 b^2 c}{a^5 b^3 c^2} = 3^3 a^{-5} b^{-1} c^{-1}$

a) $\left(\frac{8x^{-2}y^{-2}z}{-x^4 y^{-4} z^3} \right)^{-1}$

b) $\frac{2^0}{\left(2^{-2}x^2y^{-2}\right)^3}$

c) $\frac{\left(m^0\right)^3 3^5 c^5}{m^2(-3)^0\left(c^2\right)^3}$

d) $\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}\ x^{-2}}{\sqrt{16}\ x^3} \right)^2}$

e) $\frac{0{,}05m^4x^{-2}}{10^2\left(m^{-2}\right)^2\left(x^{-1}\right)^2}$

f) $\frac{\left(x^2\right)^3}{x^4} : \left[\frac{x^3}{\left(x^3\right)^2} \right]^2$

g) $\frac{10^4.10^2.0{,}003}{\left(10^2\right)^2.3}$

h) $\left\{\left[\left(a^{-1}b^{-2}\right):\left(a^{-1}b\right)\right]^2 : \left(a^{-1}b^0\right)\right\}^{-2}$

22) Expresa los enunciados dados mediante símbolos y halla su valor numérico para $n = -2;\ \ m = -1$

- El duplo del cuadrado del número n
- El cubo de la diferencia entre m y n.
- La suma de los cuadrados de n y m
- El cuadrado de la suma de n y m
- La diferencia de los cubos de n y m
- El cubo de la diferencia entre n y m.

23) Simplifica las siguientes expresiones

a) $\left[\dfrac{\left(a^{-2}b^{-3}\right)^2 : \left(a^{-1}b^{-2}\right)}{a^3b^4}\right] : \left(a^{-2}b\right)$ b) $\left(\dfrac{x^{-2}y}{3} + \dfrac{1}{x^2y^{-1}}\right) . \left(x^{-2}y\right)^{-1}$

24) Establezca la veracidad o falsedad de cada enunciado, justificando la respuesta.

a) $(-x)^2 = -x^2$

b) $-x^2 > 0$; cualquiera se a x

c) $(x-2)^2 = 4 \Rightarrow x = 6$

d) $(x-1)^{-3} = \dfrac{1}{27} \Rightarrow x = -2$

25) Expresa en notación científica

a) 2 735 000 000

b) 0,000 5691

c) $0{,}0521.10^5$

26) Reduce a cm expresando el resultado en notación científica

a) 0,5 terámetro (1 terámetro es igual a 1 000 000 000 000m)

b) $7{,}8\ .\ 10^2$mm

c) $2{,}6.\ 10^3$ picómetro (1 picómetro es igual a 0,000 000 000 001m)

Radicación

Ya hemos visto el significado de la expresión $a = b^n$ para distintos valores de b y n. A partir de esta cuestión introducimos un nuevo concepto que llamamos **radicación** en el que también debemos considerar las diversas situaciones según los valores de a; b y n.

Se define:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a \quad \text{con } n \in N \text{ y } n > 1$$

> ***Para tener en cuenta:***
> ***a*** se llama **radicando**
> *n* se llama **índice** y siempre es un número natural distinto de 1

- si n es par, $a \geq 0$ existen dos posibles b reales
- si n impar siempre existe un b real

Ejemplos:

> Si el índice es 2 se omite su escritura: $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$
> El símbolo $\sqrt{a}$ se lee raíz cuadrada de *a* y $\sqrt[3]{b}$ se lee raíz cúbica de *b*.

- $\sqrt[3]{-27} = -3$ pues $(-3)^3 = -27$
- $\sqrt[4]{16} = 2$ o $\sqrt[4]{16} = -2$ ya que $2^4 = (-2)^4 = 16$

Observemos que siempre que n representa un número par y a sea un número de R^+, existirán dos valores posibles de b que satisfagan la ecuación planteada.

Así,

$\sqrt{144} = 12$ o $\sqrt{144} = -12$ ya que $12^2 = (-12)^2 = 144$

En los cálculos numéricos se conviene que cuando la raíz tiene un índice par, el radicando deberá ser no negativo y de sus dos posibles soluciones sólo se considera la positiva. A estos radicales se los llama <u>radicales aritméticos</u>

Así,

- $\sqrt[3]{-8} + \sqrt{25} = -2 + 5 = 3$
- $\sqrt[4]{16} + \sqrt[3]{-27} = 2 + (-3) = -1$

Propiedades de los radicales aritméticos

a) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

b) $\sqrt[n]{a^n} = a$

c) $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}\,.\sqrt[n]{b}$ Propiedad distributiva de la radicación en la multiplicación

d) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;$b \neq 0$ Propiedad distributiva de la radicación en la división

e) $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

f) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$ Propiedad raíz de otra raíz

Actividades

27) Calcula

a) $\sqrt{49} \ . \ 2^2 - \left\{(-3).5 - (2.3)^2\right\}$

b) $\sqrt{25-9} - 3\left(3^2 - 10\right)$

c) $\left(\sqrt{\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{1}{9}}\right) - \left[-2 + 2.(-5+8)\right]$

28) Indica qué valores debe asumir la variable para que cada una de las expresiones dadas quede definida en el conjunto de los números reales

a) $\sqrt{\frac{1}{x-4}}$

b) $\sqrt[5]{xy}$

c) $\sqrt{xy}$

d) $\sqrt[3]{\frac{1}{xy^2}}$

e) $\sqrt{\frac{x-2}{3}}$

f) $\sqrt{\frac{-3}{x}}$

29) Demuestra, aplicando las propiedades, cada una de las siguientes igualdades.

a) $2\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

b) $\sqrt{250} - \sqrt{50} + \sqrt{450} = 5\sqrt{10} + 10\sqrt{2}$

c) $\sqrt{45} - \sqrt{20} - \sqrt{80} + \sqrt{180} = 3\sqrt{5}$

d) $\sqrt{a^5 b} + \sqrt{ab^5} = \left(a^2 + b^2\right)\sqrt{ab}$

e) $\sqrt{18} + \sqrt{8} + \sqrt{98} = 12\sqrt{2}$

Radicales semejantes
Dos radicales son semejantes si tienen igual índice e igual radicando

f) $6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2} = \frac{7}{4}\sqrt{2}$

g) $\sqrt[7]{0{,}001\,.b^2}\ \sqrt[7]{\frac{1}{10000}.b^5} = \frac{b}{10}$

h) $\dfrac{\sqrt{\left(1+\frac{5}{4}\right)a\ \sqrt{169-144}}}{\sqrt{a}} = \frac{15}{2}$

i) $\dfrac{\sqrt{x} - 2\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} = 1 - 2x$

j) $7\sqrt{a^3} + b\sqrt{a} - x\sqrt{4a} = \sqrt{a}(7a + b - 2x)$

k) $\sqrt[3]{27a + 54b} = 3.\sqrt[3]{a + 2b}$

l) $(a-b).\sqrt{(a-b)^{-1}} = \sqrt{a-b}$

m) $\dfrac{\sqrt{8}\sqrt{2}}{\sqrt{a}\sqrt{a^2}} = \dfrac{4\sqrt{a}}{a^2}$

n) $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

o) $\sqrt[7]{\dfrac{2b}{b^3c^2x}} = \dfrac{\sqrt[7]{2b^5c^5x^6}}{bcx}$

p) $\sqrt[3]{7a}.\sqrt{2a}.\sqrt[6]{3a} = a\ \sqrt[6]{1176}$

q) $\dfrac{2\sqrt{a^2b}}{-\sqrt[3]{3ab}} = -2\ \sqrt[6]{\dfrac{a^4b}{9}}$

r) $\dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y}$

s) $\sqrt{3} - \sqrt{12x} - \sqrt{27b^2} = \sqrt{3}.(1 - 2\sqrt{x} - 3b)$

t) $\sqrt[3]{27b^3y^6a} = 3by^2\ \sqrt[3]{a}$

u) $\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\dfrac{2b}{a}} = \sqrt[3]{\dfrac{2a^2}{b^2}}$

v) $\dfrac{\sqrt[3]{m^2n}.\sqrt[4]{2mn}}{m.\sqrt{am}} = \sqrt[12]{\dfrac{8n^7}{a^6m^7}}$

Racionalización de denominadores

Racionalizar un denominador es encontrar una expresión equivalente a la dada sin radicales en el denominador

Caso 1

a) $\dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{2a^2}} = \dfrac{4}{\sqrt[3]{2a^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2^2a}}{\sqrt[3]{2^2a}} = \dfrac{4.\sqrt[3]{2^2a}}{\sqrt[3]{2^3a^3}} = \dfrac{2.\sqrt[3]{4a}}{a}$

Caso 2

$$\dfrac{6}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{6}{\left(\sqrt{5}+1\right)} \cdot \dfrac{\sqrt{5}-1}{\left(\sqrt{5}-1\right)} = \dfrac{6\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 1} = \dfrac{3\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$$

Recuerda (a+b)(a-b) = a^2 - b^2

Potenciación de exponente racional

Definición

$n \in N;\ n > 1$ y $m \in Z \wedge a \neq 0$: $a^{\frac{m}{n}}$ se define como

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Ejemplos:

- $(-32)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{(-32)^2}$
- $\left(-\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{8}\right)^{-1}}$
- $(25)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25^3}$

Las propiedades de la potenciación enunciadas anteriormente son válidas para la potenciación de exponente racional.

Actividades

30) Determina si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifica

a) $\dfrac{a^{\frac{4}{5}} : \sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[4]{a^{-1}}} = a^{\frac{13}{20}}$

b) $\left[\dfrac{\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{5}} . \sqrt[3]{a^2}}{a^{-\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{31}{60}}$

c) $\left[\dfrac{25x^{-2}y^{\frac{1}{3}}}{64\left(x^{-1}\right)^{\frac{2}{3}}}\right]^{\frac{1}{2}} = \dfrac{5}{8}\sqrt[6]{x^{-4}y}$

d) $\left[\dfrac{x^{3a-2}}{x^{2a-1}}\right]^{\frac{1}{a-3}} = x$

e) $\left[\dfrac{y^{b+2x}}{y^{2x}}\right]^{\frac{b+c}{b}} : y^{b+c} = 1$

31) En cada uno de los siguientes casos calcula valores de x, y, z que verifiquen la igualdad

a) $\sqrt[5]{ab^2}\,\sqrt{c} = a^x b^y c^z$

b) $\dfrac{\sqrt{2b^3}\,\sqrt[5]{b}}{\sqrt[4]{a^3}} = 2^x a^y b^z$

c) $\sqrt{\dfrac{a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{2}{3}}}{3\sqrt{b}}} = 3^x a^y b^z$

d) $(63a)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{28a} = 5^x 7^y a^z$

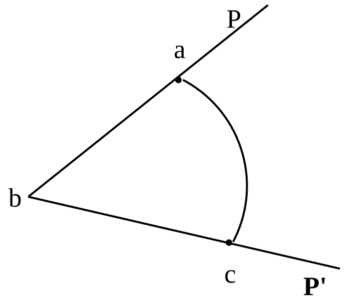
TRIGONOMETRIA

ÁNGULO PLANO CONVEXO

Definición:

Llamamos **ángulo plano convexo abc** y se simboliza $\widehat{abc}$ al conjunto de puntos del plano barridos por la semirrecta $\overrightarrow{ba}$ al pasar de su posición inicial P a una posición final P’, describiendo el punto “a” un arco de circunferencia menor o igual que una semicircunferencia o igual a una circunferencia

Gráficamente :



Simbólicamente:

$\widehat{abc}$

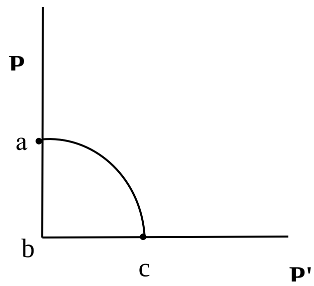
Clasificación de los ángulos convexos

Según el arco de circunferencia que describe, podemos clasificar los ángulos en :

Ángulo Recto

Es todo ángulo cuyo arco correspondiente es la cuarta parte de una circunferencia.

Gráficamente:



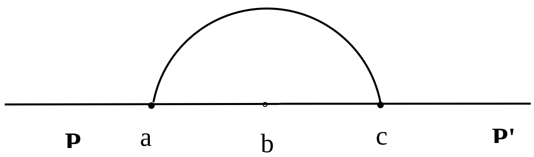
Simbólicamente:

$\hat{R}$

Ángulo llano

Es todo ángulo cuyo arco correspondiente es la mitad de una circunferencia.

Gráficamente:



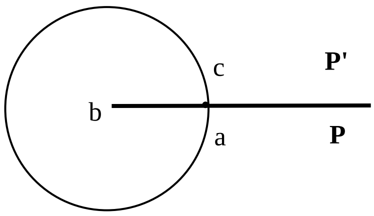
Simbólicamente:

$\hat{L}$

Ángulo de una vuelta

Es todo ángulo cuyo arco correspondiente es una circunferencia.

Gráficamente:



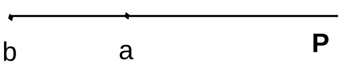
Simbólicamente:

$\hat{V}$

Ángulo nulo

Es todo ángulo cuyo arco correspondiente es un arco nulo.

Gráficamente:

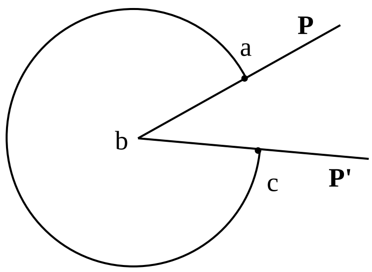


Simbólicamente:

$\hat{N}$

Sabías que...

Llamamos ***ángulo plano cóncavo*** *abc y se simboliza* $\widehat{abc}_{\text{cóncavo}}$ *al conjunto de puntos del plano barridos por la semirrecta* $\overrightarrow{ba}$ *al pasar de una posición inicial* ***P*** *a una posición final* ***P’****, describiendo un arco mayor que una semicircunferencia y menor que una circunferencia.*



EL ÁNGULO Y SU MEDIDA

Del mismo modo que para medir segmentos, cada vez que medimos un ángulo utilizamos una unidad de medida conveniente. Esta unidad es elegida dentro de las unidades convencionales dando lugar a diversos sistemas de medición de ángulos.

Nos ocuparemos de dos de ellos:

- Sistema sexagesimal
- Sistema Circular o del Radián

I) Sistema sexagesimal

El sistema sexagesimal de medición de ángulos data de la antigua Babilonia donde los habitantes consideraron que el año tenía 360 días y tomaron como unidad de medida angular el recorrido diario del Sol alrededor de la Tierra y, por lo tanto, adoptaron como unidad de medida un submúltiplo del ángulo de una vuelta, más exactamente como:

$$\frac{1}{360} \text{ de } \hat{V}$$

Así obtenemos el ángulo llamado de un grado sexagesimal cuya simbología es: 1º
De esta definición resultará para los ángulos clasificados anteriormente:

$$\hat{V} = 360 \cdot 1º = 360º$$

$$\hat{L} = 180 \cdot 1º = 180º$$

$$\hat{R} = 90 \cdot 1º = 90º$$

$$\hat{N} = 0 \cdot 1º = 0º$$

Algunos submúltiplos del grado reciben nombres particulares, ellos son:

$$1 \text{ minuto } = 1' = \frac{1}{60} \cdot 1º$$

$$1 \text{ segundo } = 1'' = \frac{1}{60} \cdot 1' = \frac{1}{3600} \cdot 1º$$

Actividades

1) Calcula el valor de $\hat{\alpha}$, expresado en grados, minutos y segundos:

a) $\hat{\alpha} = 2°,8 + 17°35'$

b) $\dfrac{5\hat{\alpha} + 8°3'}{2} = 25°,4$

2) Determina el valor del ángulo cuyo doble es igual a su complementario disminuido en 20°.

Recuerda:
Ángulos complementarios: dos ángulos son complementarios cuando la suma de sus medidas es la medida de un ángulo recto.
Ángulos suplementarios: dos ángulos son suplementarios cuando la suma de sus medidas es la medida de un ángulo llano.

3) La suma entre el triple de la medida de un ángulo y la medida del suplemento del mismo es 210°. Hallar la medida del mismo

4) El suplemento de un ángulo $\hat{\beta}$ es de 162º 20”. ¿Cuál es la medida de la suma entre la medida del ángulo $\hat{\beta}$ y la de su complementario?

5) Si el ángulo $\hat{\alpha}$ mide 24° 10’, calcula el triple de $\hat{\beta}$ siendo $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\hat{\alpha} + 30°10'$.

6) Si $\hat{\alpha} = 179°\,59'\,59''$ y $\hat{\beta} = 30°\,10'\,20''$; calcula:

a) El complemento de $\hat{\beta}$ más el suplemento de $\hat{\alpha}$.

b) La mitad de $\hat{\alpha}$ menos la quinta parte de $\hat{\beta}$.

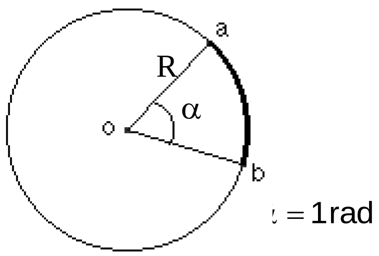
II) Sistema Circular o del Radián

En este sistema de medición de ángulos, la unidad de medida la denominaremos ***RADIÁN*** y la simbolizaremos:

1 rad = 1 radián

Definiremos al Radián de la siguiente manera:

Dada una circunferencia de centro o y radio *R*, el ángulo central $\hat{\alpha}$ es de un Radián, cuando la medida del arco correspondiente a dicho ángulo es igual a la medida del radio de la circunferencia.



De lo expuesto para el ángulo de una vuelta ($\hat{v}$) resulta:

$$\hat{v} = 360° = 2\pi \text{ radianes}$$

Actividades

7) Expresar en radianes los siguientes ángulos dados en el sistema sexagesimal

a) 360º
b) 130º
c) 90º
d) 45º
e) 30º
f) 270º
g) 60º

8) Expresa en el sistema sexagesimal

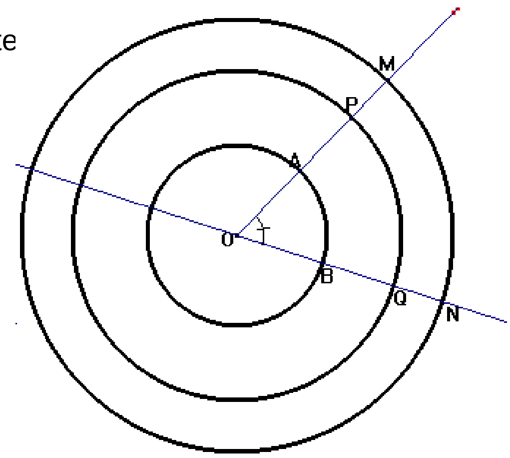
a) $3\frac{\pi}{2}$ b) $3\frac{\pi}{6}$ c) $5\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{5}$ e) $2\frac{\pi}{5}$

9) Transforma del sistema sexagesimal al circular o viceversa según corresponda

a) 36º20'12''
b) 323º18'17'',2
c) 1,389
d) 0,0023

ALGO MÁS SOBRE EL SISTEMA CIRCULAR.
LONGITUD DE ARCO DE CIRCUNFERENCIA

Consideremos un conjunto de circunferencias concéntricas $C_1;\ C_2;...;\ C_n$ cuyos radios miden respectivamente



Sea $\hat{\alpha}$ un ángulo con vértices en el centro O de las circunferencias, correspondientes a los arcos:

$$\overset{\frown}{AB} \;\; o \;\; \overset{\frown}{PQ} \;\; o \;\; \overset{\frown}{MN}$$

Sabemos que las medidas de estos arcos son proporcionales a los respectivos radios, por lo tanto si

$$\mathrm{m}\left(\overset{\frown}{AB}\right) = a_1 \quad \mathrm{m}\left(\overset{\frown}{PQ}\right) = a_2 \ldots \ \mathrm{m}\left(\overset{\frown}{MN}\right) = a_3$$

tenemos que:

$$\frac{a_1}{r_1} = \frac{a_2}{r_2} = \ldots \frac{a_n}{r_n}$$

Pero si tenemos $r_1 = 1$ resulta que

$$\frac{a_1}{r_1} = medida\ de\ \hat{\alpha}\ en\ radianes$$

Resulta así que:

$$\frac{a_1}{r_1} = \frac{a_2}{r_2} = \ldots \frac{a_n}{r_n} = \text{medida de } \hat{\alpha} \text{ en radianes}$$

Es decir que si $\hat{\alpha}$ es un ángulo correspondiente a un arco $\overset{\frown}{PQ}$ de una circunferencia de radio OP se tiene que

$$\alpha(\mathrm{rad}) = \mathrm{m}(\hat{\alpha}) \text{ en radianes } = \frac{\mathrm{m}\left(\overset{\frown}{PQ}\right)}{\mathrm{m}(OQ)} = \frac{a}{r}$$

$$\boxed{\alpha(rad) = \frac{a}{r}}$$

de esta relación se obtiene:

$$a = r \,.\, \alpha(rad)$$

Es decir que la medida de un arco de circunferencia de radio r correspondiente a un ángulo $\hat{\alpha}$ es igual al producto del ángulo $\hat{\alpha}$, medido en radianes, por la medida del radio.

Actividades

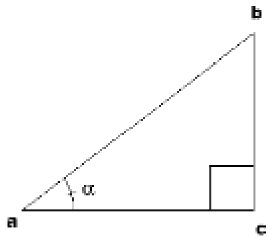
10) Calcula en cm la longitud de un arco de circunferencia de 5m de radio, correspondiente a un ángulo central de 45º30’
11) Calcula el arco correspondiente a un lado de un hexágono regular inscripto en una circunferencia de 30 cm de radio.
12) Calcula en m la longitud del radio de una circunferencia tal que al ángulo central de 30º corresponde un arco de 39,27cm

Razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo

La Trigonometría es la rama de la matemática que analiza las relaciones entre la medida de los ángulos y lados de un triángulo.

En particular nos ocuparemos de ***Resolución de triángulos rectángulos***;

En primer lugar es conveniente darles nombres a algunos elementos que componen el triángulo rectángulo.



<u>Observación</u>:
La hipotenusa de un triángulo rectángulo es siempre el lado opuesto al ángulo recto.

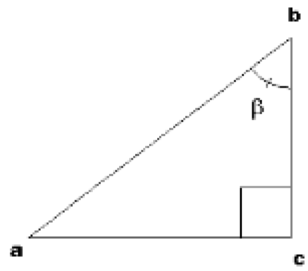
Llamamos:

- Cateto adyacente con referencia al $\hat{\alpha}$ del $\overset{\Delta}{abc}$ al segmento $\overline{ac}$.
- Cateto opuesto con referencia al $\hat{\alpha}$ del $\overset{\Delta}{abc}$ al segmento $\overline{bc}$.
- Hipotenusa del triángulo $\overset{\Delta}{abc}$ al segmento $\overline{ab}$.

En base a lo expuesto y considerando el $\overset{\Delta}{abc}$, completa:

En el triángulo $\overset{\Delta}{abc}$, con referencia al $\hat{\beta}$, se llama:

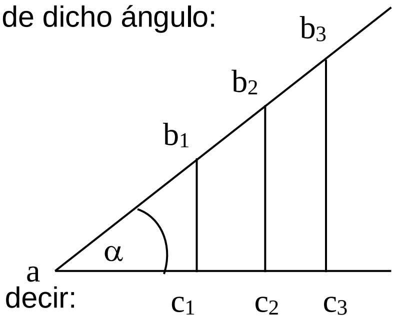
- Cateto opuesto al segmento ………………….
- Cateto adyacente al segmento ………………….
- Hipotenusa al segmento ………………….



Definición de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.

Consideremos un ángulo $\hat{a}$ cualquiera agudo.

Sean $\overset{\Delta}{ab_1c_1}$; $\overset{\Delta}{ab_2c_2}$; $\overset{\Delta}{ab_3c_3}$ algunos de los triángulos rectángulos que podemos construir según indicamos en la figura, con $\hat{a}$ ángulo común y b_1 ; b_2 ; b_3 ; c_1 ; c_2 ; c_3 puntos pertenecientes a los lados de dicho ángulo:



Según hemos visto, resulta:

$$\overset{\Delta}{\boldsymbol{ab_1c_1}} \sim \overset{\Delta}{\boldsymbol{ab_2c_2}} \sim \overset{\Delta}{\boldsymbol{ab_3c_3}}$$

Entonces, las medidas de sus lados son proporcionales, es decir:

$$\frac{b_1c_1}{ab_1} = \frac{b_2c_2}{ab_2} = \frac{b_3c_3}{ab_3} = k_1$$

$$\frac{ac_1}{ab_1} = \frac{ac_2}{ab_2} = \frac{ac_3}{ab_3} = k_2$$

$$\frac{b_1c_1}{ac_1} = \frac{b_2c_2}{ac_2} = \frac{b_3c_3}{ac_3} = k_3$$

Cada una de esta serie de razones iguales, que son independientes de los triángulos considerados y que sólo varían si varía $\hat{a}$, reciben nombres especiales. Así:

$$k_1 = \frac{medida\ del\ cateto\ opuesto\ a\ \hat{a}}{medida\ de\ la\ hipotenusa} = \text{ seno de } \hat{a} = sen\ \hat{a}$$

$$k_2 = \frac{medida\ del\ cateto\ adyacente\ a\ \hat{a}}{medida\ de\ la\ hipotenusa} = \text{ coseno de } \hat{a} = \cos \hat{a}$$

$$k_3 = \frac{medida\ del\ cateto\ opuesto\ a\ \hat{a}}{medida\ del\ cateto\ adyacente\ a\ \hat{a}} = \text{tangente de } \hat{a} = tg\ \hat{a}$$

A tales expresiones: $sen\ \hat{a}$; $\cos \hat{a}$; y $\operatorname{tg} \hat{a}$ se las denomina **RAZONES TRIGONOMETRICAS DE** $\hat{a}$.

Resolución de un triángulo rectángulo

Esta actividad consiste en determinar las medidas de todos sus elementos, entendiéndose por ellos a sus lados y ángulos interiores.

Se debe tener en cuenta que las expresiones a emplear deberán seleccionarse según el caso a resolver.

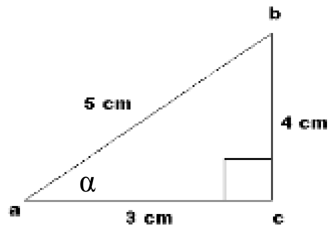
Problemas

13) De acuerdo a los datos de la figura, completa:

sen $\hat{a}$ =

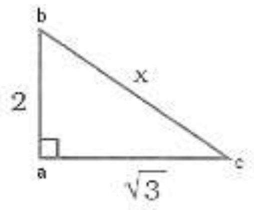
cos $\hat{a}$ =

tg $\hat{a}$ =

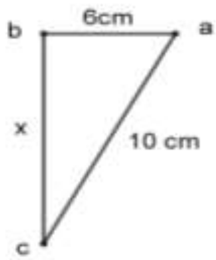


14) Calcula x, y las razones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo $\overset{\Delta}{abc}$

a)



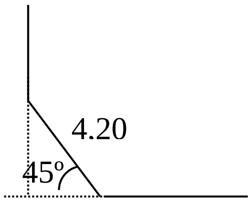
b)



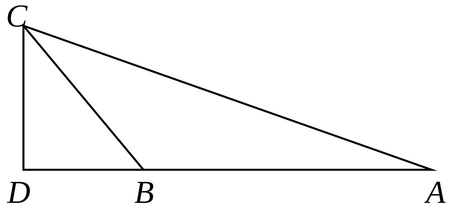
15) Halla la superficie de un rectángulo cuya base es de 16 m y la diagonal forma con ella un ángulo de 34º30’16’’

16) Calcula los ángulos interiores y la superficie de un triángulo isósceles cuya base mide 40 cm y cada lado congruente 60 cm.

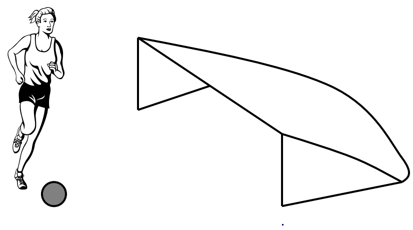
17) Un edificio está ubicado en la esquina y tiene una ochava de 45º con un frente de 4,20m. En la planta alta se quiere construir un balcón en voladizo siguiendo la línea de las paredes, como indica la figura. ¿Qué longitud tendrá cada pared del balcón?



18) En la figura $\hat{A} = 20º33'15''$; $C\hat{B}D = 50º34'27''$; $CB = 12{,}5m$. Calcula la medida de AB. (AD es perpendicular a CD)

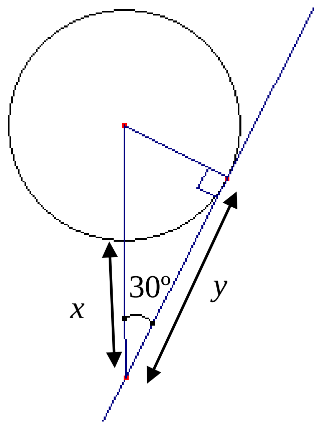


19) ¡Penal! La pelota se sitúa en el punto fatídico a 11m del arco, que mide 7,42m entre poste y poste. El jugador lanza la pelota a ras del suelo 18º hacia la derecha de la línea imaginaria que une el punto de penal con el centro del arco. El arquero engañado se tira hacia el otro lado ¿será gol?



20) Calcula x e y en la siguiente figura

$r = 2$ cm



EXPRESIONES ALGEBRAICAS

LENGUAJE : • COLOQUIAL • SIMBÓLICO o ALGEBRAICO • GRÁFICO

En Matemática una misma idea puede expresarse empleando diversas formas del lenguaje.
Por ejemplo, en lenguaje coloquial la siguiente situación:
"la suma del opuesto de un número y tres cuartos del mismo"
se expresa en el lenguaje simbólico

$$-x+\frac{3}{4}x$$

Lo que escribiste es una ***expresión algebraica en x***, donde la letra *x*, llamada **variable** de la expresión, indica **un número cualquiera.**

Observemos, en la tabla, que el valor de la expresión: $-x+\frac{3}{4}x$ depende del valor de la variable. A cada valor encontrado se lo denomina valor numérico de la expresión algebraica.

Valor numérico de x	Valor numérico de la expresión algebraica $-x+\frac{3}{4}x$
0	$0+\frac{3}{4}\cdot 0=0$
-1	$-(-1)+\frac{3}{4}(-1)=\frac{1}{4}$
$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}+\frac{3}{4}\cdot\sqrt{2}=-\frac{1}{4}\sqrt{2}$

Actividades

1) Completa de modo que la igualdad resulte cierta

a) $3x^2ya=\left(\frac{7}{3}xy\right).\left(\ldots\ldots\ldots\right)$ b) $\frac{1}{4}a^2b^2c=(bc).(\ldots\ldots\ldots)$

c) $(4ax).\left(\frac{3}{5}abx\right)=(\ldots\ldots\ldots)$ d) $(-5mp).(\ldots\ldots)=\frac{1}{3}mp^2$

2) Transforma los productos en sumas indicadas.

a) $(-4)a\left(2bc+\frac{1}{8}ab\right)$

b) $(-3)ax\left[\left(-\frac{2}{3}\right)x+(-1)ax\right]$

c) $[a+(-3)bc].[(-2)b+(-3)]$

d) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)p\right].[3+(-2)p].[p^2q+(-3)]$

e) (-2z).(zb – x)

f) (1 – 2.b).(- b + 4)

g) (1 – x).(x + 2)

h) 3x.(1 – x)(2 + x)

PRODUCTOS ESPECIALES

- **Cuadrado de un Binomio**

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2=(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\underbrace{\mathbf{a}^2+2\mathbf{ab}+\mathbf{b}^2}_{\textbf{Trinomio cuadrado perfecto}}$$

- **Cubo de un Binomio**

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^3=(\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\underbrace{\mathbf{a}^3+3\mathbf{a}^2\mathbf{b}+3\mathbf{ab}^2+\mathbf{b}^3}_{\textbf{Cuatrinomi o cubo perfecto}}$$

- **Producto de la suma por la diferencia**

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\underbrace{\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2}_{\textbf{Diferencia de cuadrados}}$$

FACTOREO: TRANSFORMAR UNA SUMA ALGEBRAICA EN UNA MULTIPLICACIÓN

a) Factor común

Ejemplo:

a) $a^2b+a^2+a^3=a^2.(b+1+a)$

b) $(a-\sqrt{2})b+(a-\sqrt{2})b^2+(a-\sqrt{2})2=(a-\sqrt{2}).(b+b^2+2)$

b) Diferencia de cuadrados

Ejemplos:

a) $4x^2-y^2=(2x-y).(2x+y)$

b) $(2a-1)^2-b^2=(2a-1-b).(2a-1+b)$

c) Trinomio cuadrado perfecto

Ejemplos:

a) $x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$

b) $a^2 - 4ab^2 + 4b^4 = \left[a + (-2)b^2\right]^2 = \left(a - 2b^2\right)^2$

d) Cuatrinomio cubo perfecto

Ejemplos:

a) $x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{27} = \left(x + \frac{1}{3}\right)^3$

b) $8 - n^3 - 12n + 6n^2 = \left[2 + (-n)\right]^3 = (2-n)^3$

e) Factor común por grupos

a) $x^2 + 2xy + x + 2y = \left(x^2 + x\right) + (2xy + 2y) = x(x+1) + 2y(x+1) = (x+1)(x+2y)$

b) $4x - 2xy + 3x - 6 = (4x - 2xy) + (3x - 6) = 2x(2-y) - 3(2-y) = (2-y)(2x-3)$

f) Factoreo combinados

Ejemplos

a) $-\frac{1}{16} - x^4 + \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{16} - x^4 + \frac{1}{2}x^2 = (-1)\left(\frac{1}{16} + x^4 - \frac{1}{2}x^2\right) = (-1)\left(\frac{1}{4} - x^2\right)^2$

b) $\frac{1}{2}x^4 - 162y^4 = \frac{1}{2}\left(x^4 - 81y^4\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 9y^2\right)\left(x^2 + 9y^2\right) = \frac{1}{2}(x-3y)(x+3y)\left(x^2+9y^2\right)$

Actividades

3) Obtiene la mínima expresión:

a) $2m\left(\frac{9}{2}m - 1\right) + (-2)^{-2} - \left(3m + \frac{1}{2}\right)^2 =$

b) $(2x-1)^2 - \left(-\frac{1}{4x}\right)^{-1} =$

c) $\left(\frac{1}{a+b}\right)^{-2} - (a-b).(a+b) =$

d) $\left[5 - 3xy\right]^3 - x^2\left(y^2 - xy^3\right) =$

e) $(1-2b)^2 - (-b+4)^3 =$

4) Factorea todo lo posible

a) $4a^4 - 8a^2 + 4$

b) $a^2 + 2a + 1 - b^2$

c) $3x^2 - 12xy + 12y^2$

d) $6a^3b^3 - 24ab$

e) $81x^4 - 16$

f) $5x^2 - 10xy + 5y^2$

g) $3x^9y^7 - 12x^7y^9$

h) $ax^2 - a + x^2 - 1$

i) $16x^3 - 24x^2y + 12xy^2 - 2y^3$

j) $36a^2x + 24abx + 3b^2x$

k) $9x^3 - 9x^2y - 6x^2 + 6xy + x - y$

l) $\frac{1}{2}a^3x^2 - \frac{1}{8}a^3y^2 - \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{8}ay^2$

m) $a^3 - a^2 - a + 1$

n) $2a^3 - a^2 + 2 - 4a$

ECUACIONES

Comenzaremos recordando concepto de "ecuación" en una incógnita o variable que se ha trabajado en diferentes cursos de Matemática:

Ecuación: Es toda igualdad que contiene una o más variables, llamadas incógnitas

Así, por ejemplo son ecuaciones en una incógnita:

$x^2 - 4 = 0$ que se verifica si $x = 2$ o $x = -2$

$3x - 1 = 0$ que se verifica para $x = \frac{1}{3}$

$2(x+1) = 2x + 2$ que se verifica para cualquier valor de la incógnita (es una identidad)

En general una igualdad del tipo: $ax + b = 0$ constituye una ecuación que contienen a la incógnita x.

Resolver una ecuación es hallar el o los valores numéricos para la incógnita que la verifican. Ese conjunto de números que satisfacen una ecuación se denomina conjunto solución.

Así, solución de la ecuación: $16.2^{x-1} = 1$ es $x = -3$,pues $16.2^{-4} = 16.\frac{1}{16} = 1$, entonces, el conjunto solución es $S = \{-3\}$

Para pensar:

- Analiza las soluciones de una ecuación del tipo ax = b, para cualquier valor de a y b

Para resolver las ecuaciones se emplean generalmente un método que está basado en la obtención de ecuaciones equivalentes, a través de la aplicación de sucesivas transformaciones.

Tener presente que

"Dos ecuaciones son equivalentes si admiten el mismo conjunto solución"

De esta forma la ecuación inicial se transforma en ecuaciones equivalentes hasta lograr una ecuación en la que en forma inmediata se pueda obtener la solución.

Para ello es preciso tener presente las siguientes propiedades:

- Sumando a ambos miembros de una ecuación una misma "expresión" se obtiene una ecuación equivalente a la dada
- Multiplicando a ambos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero se obtiene una ecuación equivalente.

☞ **Resolvamos las siguientes ecuaciones**

a) $\frac{x+7}{6}+\frac{2x-8}{-2}=-4$

Realizamos la suma de fracciones

$\frac{-10x+62}{12}=-4$

Multiplicamos a ambos miembros de la ecuación por 12 se obtiene una ecuación **equivalente**

$-10x+62=-48$

Sumamos a ambos miembros de la ecuación (-62) se obtiene una ecuación **equivalente**

$-10x=-110$

Dividimos a ambos miembros de la ecuación por (-10) se obtiene una ecuación **equivalente**

$x=11$

es una solución de la ecuación planteada pues dicho valor la verifica por lo tanto

$S = \{11\}$

b) $\sqrt{x} + \sqrt{x+2} = 3$

elevando al cuadrado a ambos miembros

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+2}\right)^2 = (3)^2$$

$$x + x + 2 + 2\sqrt{x(x+2)} = 9$$

Puede ocurrir que esta ecuación no sea equivalente a la dada ya que la estrategia aplicada de elevar al cuadrado a ambos miembros, no cumple con las propiedades de ecuaciones equivalentes

$$2\sqrt{x(x+2)} = 7 - 2x$$

elevando al cuadrado a ambos miembros nuevamente resulta

$$4x(x+2) = 49 + 4x^2 - 28x$$

$$4x^2 + 8x = 49 + 4x^2 - 28x$$

$$36x = 49$$

$$x = \frac{49}{36}$$

Verificamos la solución obtenida en la ecuación original:

$$\sqrt{\frac{49}{36}} + \sqrt{\frac{49}{36} + 2} = \frac{7}{6} + \frac{11}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

luego $x = \frac{49}{36}$ es solución de la ecuación dada. $S = \left\{\frac{49}{36}\right\}$

c) $\sqrt{x-3} - 2 = \sqrt{x}$

$x - 3 + 4 - 4\sqrt{x-3} = x$ ¿Es equivalente a la ecuación original?

$$-4\sqrt{x-3} = -1$$

$$16(x-3) = 1$$

Verificando:

$\sqrt{\frac{49}{16} - 3} - 2 \neq \sqrt{\frac{49}{16}}$, o sea que $x = \frac{49}{16}$ **no es solución** de la ecuación planteada.

Por lo tanto la ecuación planteada no tiene solución $S = \{\ \} = \Phi$

$$x = \frac{49}{16}$$

Hasta el momento te has enfrentado con situaciones en las que debías encontrar el valor de una incógnita de modo tal que verifiquen una igualdad.
Pero, no siempre, las ecuaciones se presentan del mismo tipo de las que has trabajado.
Por ejemplo; te proponemos resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{5}{2}x - 1 = \frac{1}{4}(10\ x - 2) - \frac{1}{2}$

b) $3x - 2 = \frac{1}{2}(6x - 2) + \left(-\frac{1}{2}\right)$

En la primera; a través de las distintas transformaciones que realizas, utilizando propiedades; llegarás seguramente a una expresión:

$$0.x = 0$$

Esto significa que x puede asumir cualquier número real, es decir $\forall\ x \in R$, verificando la igualdad.
En cambio en la segunda ecuación; te encontrarás con una situación de la forma:

$$0.x = \frac{1}{2}$$

En este caso la incógnita no puede asumir ningún número real, es decir $\nexists\ x \in R$, que verifique la igualdad.

PODEMOS CONCLUIR

En toda expresión del tipo $a.x = b$, donde se deba encontrar el valor de x que verifique la igualdad, puede suceder:

- Si $a \neq 0$ en cuyo caso $x = \frac{b}{a}$, decimos que la ecuación es **compatible** con **solución única** y se indica $S = \left\{\frac{b}{a}\right\}$, donde S es el conjunto solución
- Si $a = 0$, o sea $0.x = b$, según el valor de b puede ser:
  - ► $b = 0$, la ecuación es $0x = 0$, x pude tomar cualquier valor y la ecuación recibe el nombre de **compatible** con **infinitas soluciones (indeterminada)** y el conjunto solución se indica S = R
  - ► $b \neq 0$, la ecuación es $0x = b$, **no existe ningún valor de** x que verifique la igualdad y la ecuación recibe el nombre de ecuación **incompatible** y el conjunto solución se indica $S = \varnothing$

Actividades

1) Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $(3x-2)-(x+3)=8$

b) $2(x-3)-3(4x-5)=17-8x$

c) $\frac{1}{2}x-3\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right)=\sqrt[3]{-27}+x$

d) $\frac{x+4}{3}-\frac{x-4}{5}=2+\frac{3x-1}{15}$

e) $\frac{\frac{1}{2}x-5}{7}-\frac{x-1}{2}=\frac{2-3x}{7}$

f) $\sqrt{2x+5}-1=3$

g) $\sqrt{y+6}=3$

h) $\frac{2}{x}=x-1$

i) $\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{3}=4$

☞ **Resolvamos las siguientes ecuaciones fraccionarias**

a) $$\frac{5}{x-4}=\frac{6}{x-3}$$

Llamamos ecuación fraccionaria a aquella que expresa una igualdad de expresiones algebraicas racionales en cuyo denominador se encuentra la incógnita.

Conviene escribir la ecuación de forma que no tenga fracciones.

Multiplicando ambos miembros por el M.C.D., $(x-4)(x-3)$ tenemos

$$(x-4)(x-3)\frac{5}{x-4}=\frac{6}{x-3}(x-4)(x-3)$$

aplicando propiedades se obtiene una ecuación lineal

$$5.(x-3)=6.(x-4)$$

$$5x-15=6x-24$$

$$9=x$$

Al multiplicar a ambos miembros de una ecuación por expresiones que impliquen la variable x no se está garantizando que la última ecuación sea equivalente a la original. Se debe verificar si el valor obtenido de la variable satisface o no la ecuación original.

Sustituyendo por 9 la ecuación original, se obtiene

$$\frac{5}{9-4}=\frac{6}{9-3}$$

$1=1$ que es un enunciado verdadero.

Por lo tanto, 9 es solución de la ecuación dada.

$$S=\{9\}$$

b) $$\frac{3x+4}{x+2}-\frac{3x-5}{x-4}=\frac{12}{x^2-2x-8}$$

Multiplicando ambos miembros por el M.C.D., $(x-4)(x+2)$ tenemos

$$(x-4)(x+2)\left(\frac{3x+4}{x+2}-\frac{3x-5}{x-4}\right)=\frac{12}{x^2-2x-8}(x-4)(x+2)$$

aplicando propiedades se obtiene una ecuación lineal

$$(x-4)(3x+4)-(x+2)(3x-5)=12$$
$$3x^2-8x-16-(3x^2+x-10)=12$$
$$3x^2-8x-16-3x^2-x+10=12$$
$$3x^2-8x-16-3x^2-x+10=12$$
$$-9x-6=12$$
$$-9x=18$$
$$x=-2$$

Sin embargo la ecuación original no está definida para $x=-2$, de modo que no existen raíces. El conjunto solución es $S=\varnothing$. Aunque -2 es una solución de ésta ecuación, no lo es de la ecuación original y se la denomina solución extraña de la ecuación original.

.

Actividades

2) Resuelve las ecuaciones fraccionarias indicadas en cada apartado

a) $\dfrac{\frac{x}{3}+\frac{1}{5}}{\frac{x}{3}-\frac{1}{5}}=-1$

b) $\dfrac{5}{5-x}+\dfrac{4}{7x-35}=\dfrac{31}{7}$

c) $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{x-1}{x+1}\right)=\dfrac{1}{x+1}$

d) $\dfrac{x-5}{5-x}=-1$

e) $x+1-\dfrac{2(x+1)^2}{x-1}=-\dfrac{7+x^2}{x-1}$

f) $\dfrac{a}{x-1}=\dfrac{2a}{x^2-1}-\dfrac{a}{x+1}$

3) Aplicando la condición de anulación del producto (a.b = 0$\Leftrightarrow$ a=0 $\vee$ b=0) encuentra, en cada ecuación, el conjunto de soluciones

a) $x^2(2x-1).\left(-x-\sqrt{2}\right)=0$

b) $\left(x^3-8\right).(x+2)=0$

c) $\left(x^2+\sqrt{2}\right).x=0$

d) $\dfrac{1}{x}\left(x^2+1\right)=0$

e) $\left(\dfrac{1}{x}-1\right).x^3=0$

☞ **Resolvamos las siguientes ecuaciones**

a) $|x-5|=10$

por definición de valor absoluto resulta que:

x - 5 =10 o x - 5 = -10

x = 15 o x = -5

b) $\log_5(2x+3)=3$

por definición de logaritmo resulta que

$5^3 = 2x+3$

Recordemos:
$\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x$ con
x>0 $\wedge$ a≠1,a>o

$125 = 2x+3$

$122 = 2x$

$61 = x$

Verificando en la ecuación original

2. 61+3 >0

Por lo tanto, $x = 61$ es solución de la ecuación

Actividades

4) Calcula el o los valores de x en cada una de las siguientes ecuaciones

a) $|3x-2|=5$

b) $|1-4x|=4$

c) $\frac{1}{3}\cdot\left|\frac{5}{3}-\frac{1}{2}x\right|+1=\frac{5}{3}$

d) $\left|-2x+\frac{3}{4}\right|+2=\frac{5}{2}$

e) $2^{x+1}=\sqrt{2}$

f) $3\log_2(x+1)-\log_2(x+1)=2$

g) $log_2(4x-3)=8$

h) $\log_3(x+2)=0$

i) $2^x.8=\frac{1}{16}$

j) $\frac{3^{2x+1}}{3^{x-4}}=81$

5) Resuelve los siguientes problemas:

a. De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido, después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad del depósito.

b. La semisuma de un número y su consecutivo, aumentada en la tercera parte de dicho número da como resultado la sexta parte de treinta y cinco. ¿Cuál es el número?

c. El cociente entre dos números pares sucesivos es igual a 1,01. Determina éstos.

d. En un año, un fabricante de carteras descubrió que el 2% de las mismas fueron retiradas de la venta por imperfecciones. Si se fabrican C carteras en un año, ¿cuántas tendrá el fabricante que retirar de la venta?. Este año se proyecta una venta anual de 2000 carteras. Aproximadamente, ¿cuántas carteras deberá fabricar si toma en cuenta las rechazadas.

e. En una fábrica se produce un producto compuesto de dos elementos que llamaremos A y B. El elemento A se produce a razón de 4,5 unidades por hora y el elemento B a razón de 8 unidades por hora. Al comenzar la fabricación hay una existencia de 90 unidades del producto A u 20 de producto B. En un instante dado, se inicia simultáneamente la producción de los elementos. Determina después de cuánto tiempo las cantidades de los elementos A y B son iguales y qué cantidad de unidades del producto final se podrán armar.

6) Resuelve las siguientes ecuaciones, indica el conjunto solución

a) $\frac{3}{2}x+(-2)=\frac{1}{4}(6x-2)+\left(-\frac{1}{2}\right)$

b) $(-3).(\frac{x-3}{27})+0,\overset{\frown}{1}x=\frac{1}{3}$

c) $2.(x+2)=3x+\left(-\frac{2}{3}\right).(x+1)+\left(-\frac{1}{3}x\right)$

g) $\frac{x-2}{3}-\frac{1-2x}{2}=\frac{4x-1}{3}$

h) $\dfrac{\frac{2}{3}(5x-2)-\frac{2}{3}}{2-\frac{1}{5}(x-1)}=-2$

i) $\left|x-\frac{1}{3}\right|=(-9)$

d) $2x+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}.(4x+3)+(-4x)$

j) $\left|\left(-\frac{2}{5}\right)+x\right|=0$

e) $\left(-\frac{1}{2}\right).(0,4x+3)=-\left(1,5+\frac{1}{5}x\right)$

k) $\frac{4}{x-5}=0$

Ecuaciones de segundo grado

Ya hemos visto algunos procedimientos para resolver ecuaciones de una incógnita de grado superior a uno.

Conviene en este momento observar que si consideramos ecuaciones del tipo (ecuación cuadrática o de segundo grado)

$$ax^2+bx+c=0$$

puede deducirse la expresión:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

que nos permite hallar las dos soluciones de la misma o sea:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

en este caso particular podrá por simple sustitución comprobarse la validez de las mismas.

Como ejemplo proponemos: $2x^2-10x+12=0$

$$x_1=\frac{10+\sqrt{(-10)^2-4.2.12}}{2.2}=\frac{10+2}{4}=3 \quad \text{y} \quad x_2=\frac{10-\sqrt{(-10)^2-4.2.12}}{2.2}=\frac{10-2}{4}=2$$

Observamos que ambos valores verifican la ecuación; en efecto:

* $2 . 3^2 – 10 .3 + 12 =0$ * $2 . 2^2 – 10 .2 + 12 =0$

Por lo que ya sabemos el cálculo de $\sqrt{b^2 - 4ac}$ dependerá del radicando, que convenimos en llamar **discriminante** y escribimos $\Delta = b^2 - 4ac$

Analizando el discriminante resulta:

- $\Delta > 0$ existirá $\sqrt{\Delta}$ y en consecuencia existen **dos soluciones distintas** para la ecuación.
- $\Delta = 0$,es $\sqrt{0} = 0$ y en consecuencia las expresiones que dan $\mathbf{x_1}$ **y** $\mathbf{x_2}$ **resultan iguales**
- $\Delta < 0$, no existe, en R, $\sqrt{\Delta}$ y en consecuencia **no habrá soluciones reales** de la ecuación.

Si una ecuación de segundo grado posee dos soluciones reales estas gozan de las siguientes propiedades:

- Si **sumamos las dos soluciones** x_1 y x_2 observamos que: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- Si **multiplicamos las dos soluciones** x_1 y x_2 observamos que: $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$

Estas propiedades resultan altamente significativas en el proceso inverso, es decir si conocemos las soluciones de una ecuación de segundo grado podemos encontrar la ecuación de las que proceden.

Actividades

7) Encuentra el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $\{x / 4x^2 - 17x = -15 \ \wedge \ x \in R\}$

b) $\{y / 2 + 6\sqrt{2}y + 9y^2 = 0 \ \wedge \ y \in R\}$

c) $\{p / p^2 + p + 1 = 0 \ \wedge \ p \in R\}$

8) Construye ecuaciones cuadráticas con coeficientes enteros y que posean por raíces los números

a) 2; -3 b) $\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$ c) $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$; $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$

9) Determina el número real k de modo que la ecuación:

a) $4x^2+kx+6=0$ tenga una raíz igual a 2

b) $5x^2+8x+k=0$ tenga raíces cuyo producto sea $\frac{1}{3}$

c) $4x^2+20x+k=0$ tenga raíces iguales

d) $2x^2+(4-k)x-17=0$ cuyas raíces sean números opuestos

e) $2x^2-kx+8=0$ no tenga solución en R

10) Encuentra las dimensiones de un rectángulo si su diagonal mide 17 cm y su perímetro 46 cm.

11) El producto de dos números es 736, si la diferencia entre ambos es 9. ¿Cuáles son estos números?

12) La suma de un número y su recíproco es $\frac{34}{15}$. Determina el número.

13) Un terreno rectangular de 4m x 8m es usado como jardín. Se decide poner una vereda en toda la orilla interior de modo que 12 m^2 del terreno se dejan para flores. ¿Cuál debe ser el ancho de la vereda?

14) Si las longitudes, en cm, de los lados de un triángulo rectángulo son: $(6-x)$; $(13-x)$ y $(14-x)$, determina su perímetro (no darlo en función de x)

15) Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{1}{x}+\frac{6}{x+4}=1$

e) $2\sqrt{x+4}-x=1$

b) $\frac{x}{x+2}-\frac{4}{x+1}=\frac{-2}{x+2}$

f) $x^4-5x^2+6=0$

c) $\frac{x}{x-1}+x=1+\frac{1}{x-1}$

g) $x^{-4}-9x^{-2}+14=0$ (sugerencia: sustituye $x^{-2}=t$)

d) $\frac{1}{x^6}+\frac{9}{x^3}+8=0$

16) Con tu ingenio, creatividad y aplicando propiedades resuelve las siguientes ecuaciones

a) $4^{2x-1}=\frac{1}{16}$

e) $64\,.\,4^{1-x^2}=1$

b) $(3^x-27)(2^x-4)=0$

f) $\frac{9}{3^{2x}}=3^{-x}$

c) $\sqrt{3^x+3^x+3^x}=9$

g) $3^x=\left(\frac{1}{9}\right)^x$

d) $\frac{6}{9^x-3^x}=1$

h) $\frac{1}{3^{|2x+1|}}=9^{-2}$

17) Calcula el o los valores de y que verifiquen cada una de las siguientes ecuaciones

a) $\sqrt{y^2+9}=5$

c) $\sqrt{y^2+33}-y=3$

b) $\sqrt{(2-y)^2}=4$

d) $\log_3(2x^2+15x)=2$

INECUACIONES

Definición:

Dados los números reales a y b, se tiene que:

$$a<b\Leftrightarrow b-a>0$$

Propiedades

La suma y la multiplicación cumplen ciertas propiedades al relacionarse con las desigualdades (su validez puede ser probada). Tales propiedades son:

- Si a ambos miembros de una desigualdad les sumamos un mismo número se mantiene dicha desigualdad

En símbolos $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c \quad \forall a, b, c \in R$

- Si a ambos miembros de una desigualdad los multiplicamos por un mismo número positivo se mantiene la desigualdad

En símbolos $\forall a, b, c \in R \qquad a \leq b,\ c > 0 \Rightarrow a.c \leq b.c$

- Si a ambos miembros de una desigualdad los multiplicamos por un mismo número negativo cambia la desigualdad

En símbolos $\forall a, b, c \in R \qquad a \leq b,\ c < 0 \Rightarrow a.c \geq b.c$

Tales propiedades adquieren relevante importancia en el estudio y resolución de inecuaciones

INECUACIONES LINEALES EN UNA INCÓGNITA

Llamaremos ***inecuación lineal en una incógnita en la variable*** $\boldsymbol{x}$ a toda expresión equivalente a alguna de las siguientes:

$$ax + b < 0\ ;\ ax + b > 0\ ;\ ax + b \leq 0\ ;\ ax + b \geq 0$$

siendo $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$

Resolver una inecuación es encontrar el conjunto de todos los números reales que hace que la desigualdad sea verdadera.

☞ Resolvamos las siguientes inecuaciones, indicando el conjunto solución y representándolo en el eje real.

a) $\frac{5}{2}x + \frac{2}{3} > -\frac{1}{6}$ aplicando propiedad de la suma en R

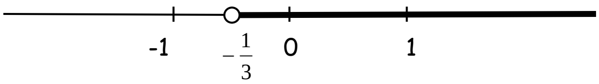
$\frac{5}{2}x + \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} > -\frac{1}{6} + \left(-\frac{2}{3}\right)$ definición de suma en R

$\frac{5}{2}x > -\frac{5}{6}$ multiplicando ambos miembros por $\frac{2}{5}$

$\frac{2}{5}.\frac{5}{2}x > -\frac{5}{6}.\frac{2}{5}$ propiedad de la multiplicación en R y def. de multiplicación

$$x > -\frac{1}{3}$$

El conjunto solución es S = {x / x $> -\frac{1}{3}$ }, siendo su representación en el eje real:



b) $-\frac{2}{3}+\frac{5}{9}x \le x$ propiedad de la suma en R, sumamos $\frac{2}{3}$ a ambos miembros

$-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{5}{9}x \le x+\frac{2}{3}$ propiedad de la suma y definición de suma en R

$\frac{5}{9}x \le x+\frac{2}{3}$ sumamos (-x) a ambos miembros

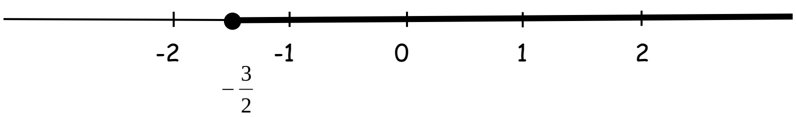
$\frac{5}{9}x+(-x) \le x+(-x)+\frac{2}{3}$ propiedad de la suma y definición de suma en R

$-\frac{4}{9}x \le \frac{2}{3}$ multiplicando ambos miembros por $-\frac{9}{4}$

$\left(-\frac{9}{4}\right).\left(-\frac{4}{9}\right)x \ge \frac{2}{3}.\left(-\frac{9}{4}\right)$ propiedad de la multiplicación y definición de multiplicación

$$x \ge -\frac{3}{2}$$

Luego, el conjunto solución es S = {x / x **≥** $(-\frac{3}{2})$ }, siendo su representación en el eje real:

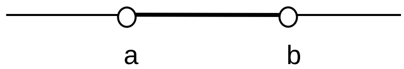
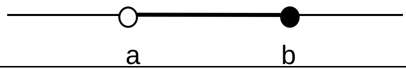


INTERVALOS

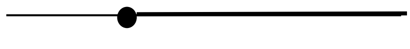
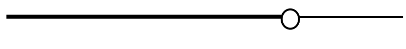
Los intervalos son subconjuntos de números reales definidos bajo ciertas condiciones

- **Intervalos acotados**

Nombre	Notación	Conjunto	Representación gráfica
Intervalo cerrado		{x/ a ≤ x ≤ b}	

	[a ; b]		
Intervalo abierto	(a ; b)	{x/ a < x < b}	 a b
Intervalos semiabiertos ó semicerrados	[a ; b)	{x/ a ≤ x < b}	 a b
	(a ; b]	{x/ a < x ≤ b}	 a b

- **Intervalos no acotados**

Nombre	Notación	Conjunto	Representación gráfica
Superiormente	[a ; +∞)	{x / x ≥ a }	 a
	(a ; +∞)	{x / x > a }	 a
Inferiormente	(-∞ ; a]	{x /x ≤ a }	 a
	(-∞ ; a)	{x / x < a }	 a

Actividades

21) Completa con el enunciado simbólico o el nombre de la propiedad que se aplica en cada paso de la resolución de las siguientes inecuaciones

a) $\frac{3}{5} \cdot x < (-2)$

$\downarrow$ ……………………………….

$\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot x < \frac{5}{3} \cdot (-2)$

$\downarrow$ ……………………………….

$\left(\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot x < \frac{5}{3} \cdot (-2)$

$\downarrow$ ……………………………….

……

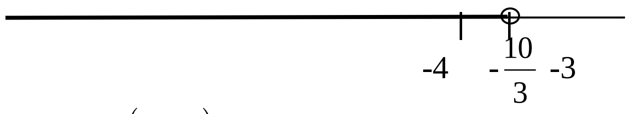
Realizando este procedimiento pasamos de una inecuación a otra más fácil de resolver. La inecuación obtenida tiene las mismas soluciones que la original. Es **equivalente** a ella

$$1 \cdot x < \left(-\frac{10}{3}\right)$$

$$\downarrow \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x < \left(-\frac{10}{3}\right)$$

Representamos el conjunto de las soluciones de la inecuación dada



b)

¡Cuidado!
Al multiplicar por un mismo número negativo a ambos miembros de la inecuación cambia el sentido de la desigualdad

$$\left(-0,\overline{3}\right).x < 2$$

$$\downarrow$$

$$(-3)\cdot\left(-0,\overline{3}\right).x > (-3)\cdot 2$$

$$\downarrow$$

$$\left[(-3)\cdot\left(-0,\overline{3}\right)\right].x > (-6)$$

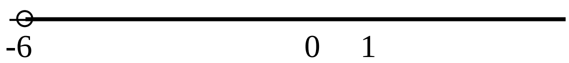
$$\downarrow$$

$$1.x > (-6)$$

$$\downarrow \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x > (-6)$$

Representamos el conjunto de las soluciones de la inecuación dada



22) Representa en el eje real los siguientes conjuntos

a) $\left\{x / 4x - \frac{5}{2} \geq 0\right\}$

c) $\left\{y / \frac{4}{3} < y - \frac{1}{6}\right\}$

d) $\left\{y / 6 + 2.(1-y) \leq \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\right\}$

e) $\left\{z / -\frac{1}{2} \leq -z < 3\right\}$

f) $\left\{ x \,/\, \frac{1-2x}{4} < 2x \right\}$

23) ¿Para qué valores de x está definida cada una de las siguientes expresiones en R?

a) $\sqrt{\frac{1}{2}x-3}$ b) $\sqrt{\frac{-2}{2-4x}}$

c) $\log(2x+3)$ d) $\log\frac{-1}{(x-2)}$

24) Resuelve las siguientes inecuaciones, indica el conjunto solución utilizando la notación de intervalos, y represéntalo en el eje real.

a) $x - 4 \geq 6$

b) $x^2+3 \geq 0$

c) $(x-4).(x+1) - 3 \geq (x-2)^2 + 7$

d) $6x + 2 < 3x$

e) $0x > 0$

f) $\frac{1}{2}x + 3 > -\frac{1}{2}x + 4$

g) $\frac{5x+2}{5} < \frac{2(x-3)}{-4}$

h) $\frac{-2}{x-1} > 0$

i) $\frac{1-x}{2} + \frac{x}{3} \geq (-2)^{-1}$

25) Sergio trabaja en el departamento de ventas de una empresa, cobrando el 5% de sus ventas, sin ningún básico fijo. Ayer, el jefe de personal le informó que para el mes que viene le darían un básico mensual de $3500, pero le rebajarían las comisiones al 3%. ¿Será mejor esta propuesta? ¿Para qué montos de ventas conviene este sistema?

26) En un micro emprendimiento se piensa fabricar chinelas para adultos. Por cada par de chinelas se calcula un gasto en materiales de $12 y además por mes un gasto fijo en impuestos, alquiler y servicios que alcanza los $3000. si se piensa vender cada par en $36, ¿Cuántos pares hay que vender mensualmente, como mínimo para obtener algún beneficio? ¿Con cuántos pares mensuales vendidos, se obtendrá una ganancia de $4000?

27) Juan ha gestionado una beca para continuar sus estudios especializados en Matemática. Para poder obtenerla entre los requisitos que le solicitan es aprobar tres exámenes con un promedio de 8 o más puntos. Si ya ha rendido dos de esas pruebas con calificaciones 9 y 8 ¿qué calificaciones puede tener en su tercer examen?

SISTEMAS DE ECUACIONES

Toda expresión de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots.. + a_nx_n = b \ ,$$

donde $x_1;\ x_2; \ldots;\ x_n$ son **incógnitas** y $a_1; a_2; \ldots; a_n; b$ son números reales, al menos uno distinto de cero, denominados **coeficientes**, se llama ecuación lineal en las incógnitas $x_1;\ x_2; \ldots;\ x_n$.

Llamaremos **conjunto solución** al conjunto de todas las soluciones, resolver una ecuación es encontrar dicho conjunto.

A partir de estas ideas se obtiene el concepto de sistema de ecuaciones cualesquiera sea el número de ecuaciones y el de incógnitas.
Si indicamos con m al número de ecuaciones y con n al número de incógnitas lo llamaremos **sistema mxn** y lo expresaremos así:

$$S)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 (E_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 (E_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ .a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m (E_m) \end{cases} \quad \text{donde:}$$

los a_{ij},, llamados **coeficientes,** y los b_i , llamados **términos independientes**, son números reales dados los símbolos $x_1, x_2, ..., x_n$ representan las n incógnitas del sistema

Con E_1 ,E_2, ...,E_m simbolizamos cada una de las ecuaciones del sistema.

- Se llama ***solución*** del sistema S a un conjunto de números reales $\{s_1, s_2, ..., s_n\}$ de manera que al hacer $x_1 = s_1, ..., x_n = s_n$ se verifica, simultáneamente todas las ecuaciones del sistema.

Actividad

1) En los siguientes sistemas de ecuaciones indica:
   - El número de ecuaciones
   - El número de incógnitas. ¿Cuáles son ellas?
   - ¿Cuáles son los términos independientes?

a) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy - 3z = 2t \\ x - 8y + t = 9 \\ y - t\,z = 5x \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y - 2 = -2 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES:

Según sus términos independientes

Un sistema **mxn** se llama **homogéneo** si todos sus términos independientes son nulos; en caso contrario lo llamamos **no homogéneo**.

Según el número de soluciones

Un sistema es **compatible** si tiene alguna solución y es **incompatible** si no tiene solución.

Un sistema compatible puede tener:

- **única** solución, en cuyo caso se dice **Sistema compatible determinado**
- **infinitas** soluciones, en cuyo caso se dice **Sistema compatible indeterminado**

Para la resolución de un sistema de ecuaciones es necesario tener en cuenta los siguientes conceptos:

- **Dos sistemas de ecuaciones lineales** de m ecuaciones con n incógnitas **son equivalentes** sí y sólo sí tienen **el mismo conjunto solución**.
- Si sobre un sistema de ecuaciones se efectúa cualquiera de los siguientes **operaciones elementales:**
  - intercambiar dos ecuaciones
  - multiplicar una ecuación por un número distinto de cero
  - reemplazar una ecuación por la suma de ésta con otra multiplicada por un número distinto de cero se obtiene un sistema equivalente al dado (Teorema de equivalencia de sistemas)

Ejemplos de sistemas equivalentes utilizando las operaciones elementales:

a) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ -x-y=0 \end{cases}$ es equivalente con $\begin{cases} -x-y=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ -x-y=0 \end{cases}$ es equivalente con $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+y=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ -x-y=0 \end{cases}$ es equivalente con $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x=1 \end{cases}$

¡Verifique!

☞ Veamos entonces cómo proceder para resolver sistemas, circunscribimos la situación a sistemas 2×2

Así, sea el sIstema: $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$

Trataremos de construir un sistema equivalente de modo que una de las ecuaciones posea una incógnita menos (**eliminación de incógnitas**)

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$$

sustituiremos la segunda ecuación por el resultado de sumarle a la misma multiplicada por 2, la primera multiplicada por (-3)

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ (6x+4y)+(-6x-9y)=5.2+5(-3) \end{cases}$$

Un sistema es escalonado cuando a partir de la segunda ecuación cada una empieza por lo menos con un coeficiente nulo más que la anterior

$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ \quad -5y=-5 \end{cases}$ hemos obtenido un **sistema escalonado.**

A partir del mismo resulta

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ \quad -5y=-5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x+3y=5 \\ \quad y=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x+3.1=5 \\ \quad y=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Esta estrategia recordamos, se denomina de eliminación de incógnitas

No es ésa la única estrategia. Podemos ver otras, que se conocen vulgarmente como **método de igualación** y **método de sustitución**, y que no son más que la aplicación del Teorema de equivalencias de un modo particular. Se presentan de esta forma:

Método de igualación:

$$\begin{cases} 2x-\ \ y=3 \\ 4x+5y=-8 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y=2x-3 \\ y=\dfrac{-8-4x}{5} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y=2x-3 \\ 2x-3=\dfrac{-8-4x}{5} \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} y=2x-3 \\ x=\dfrac{7}{14} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y=2.\dfrac{1}{2}-3 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{cases} y=-2 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}}$$

Método de sustitución

$$\begin{cases} 2x-\ \ y=0 \\ -3x+2y=-7 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y=2x \\ -3x+2y=-7 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y=2x \\ -3x+2.2x=-7 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} y=2x \\ x=-7 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y=2.(-7) \\ x=-7 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{cases} y=-14 \\ x=-7 \end{cases}}$$

Actividades:

2) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones

a) $\begin{cases} 5x - 3y = 7 \\ 2x + 7y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 3y = 24 \\ \frac{x}{5} = \frac{y}{4} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{3} = 15 \\ x - \frac{2y}{5} = 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{y}{4} - \frac{x}{7} = \frac{29}{28} \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{7} = \frac{1}{4} \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + \frac{y}{5} = 15 \\ 4y - \frac{31x}{4} = 29 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{1}{4}x - y = 7 \\ 3x - 4y = 8 \end{cases}$

3) En un campo hay gallinas y vacas. El total de animales es 60 y se cuentas 150 patas. ¿Cuántos animales hay de cada tipo en el corral?

4) Si al doble de un número se le suma el triple de otro, se obtiene 31. Pero si al triple del primero se le resta el doble del segundo, se obtiene uno. ¿Cuáles son los números?.

5) Con las treinta cuatro billetes de 5 y 10 pesos que tenía ahorrado compré una camisa de \$280.¿Cuántas monedas de cada valor tenía?.

6) Un hotel tiene habitaciones dobles y simples. Tiene en total 50 habitaciones y 87 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

7) En abril, Hilda compró 15 diarios y dos revistas, y gastó \$295. Ese mismo mes Liliana compró 20 diarios y 3 revistas y gastó \$405. ¿Cuánto costó cada diario y cada revista?

8) A ver si encuentras el número cuya suma de sus dos cifras es 8 y si se cambia el orden de sus cifras, se obtiene otro número que vale 17 unidades menos que el doble del número de partida.

9) La suma de las superficies de dos campos rectangulares es de 7,5 hectáreas. El más grande produce 70 toneladas de remolacha por hectárea y el otro 60 toneladas por hectárea. La cosecha de los dos campos se vendió a \$6.187.500. a razón de \$ 12.500 la tonelada. Calcula la superficie de cada campo. Los dos campos tienen un ancho común que es de 150 m. ¿Cuál es el largo de cada uno?

10) Don José posee un negocio de venta de café en grano y quiere preparar un café especial para sus clientes. Para ello va a mezclar dos tipos de café. Un café común que cuesta \$60 el kg y un café selección de \$90 el kg. Va a preparar bolsas de 1 kg que venderá a \$80. ¿Cuántos gramos de cada café deberá poner en cada bolsa?

11) Un comerciante compró manzanas de \$1,80 cada una y naranjas de \$0,80 cada una por un total de \$144. Las vendió con una ganancia del 20% en las manzanas y del 50% en las naranjas. En total recibió \$190,08. ¿Cuántas manzanas y cuántas naranjas había comprado?

AUTOEVALUACIÓN Nº 1

Determina si cada uno de los siguientes apartados es verdadero o falso. **Justifica**:

1. La ecuación $2.(x+2)=3x+\left(-\frac{2}{3}\right).(x+1)+\left(-\frac{1}{3}x\right)$ posee infinitas soluciones.
2. Las soluciones de la ecuación: $\left|2x-\frac{x-1}{3}\right|=1$ son $x=0$ y $x=-2$.
3. $x=2$ es solución de la ecuación $\log_2(x-\sqrt{2})=\frac{1}{2}$.
4. La expresión $\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$ es válida para cualquier valor de x.
5. $\sqrt{\frac{\sqrt{a}.a^{-3}}{\frac{1}{a}}}=a^{-\frac{3}{2}}$
6. Si $x^2 - y^2 = 33616$ y $(x - y) = 88$, resulta que $(x + y) = 382$.
7. El valor de (a.b) =2,5, entonces el valor de la expresión: $\frac{a^3b^5:(ab)^3}{a^2b^4}$ es $\frac{4}{25}$.
8. No posee solución la ecuación: $3^{x+1}.\left(\frac{1}{27}\right)^x=\frac{1}{3}$.

Apartado	1	2	3	4	5	6	7	8
Puntaje	15	15	10	10	10	10	15	15

AUTOEVALUACIÓN Nº 2

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x+2}{x-1}+\frac{x+1}{2-x}=0$

b) $\log_3(x+1)+2\log_3(x+1)=3$

c) $\sqrt{x-3}=\sqrt{x}-3$

d) $\log_4(3x-1)=\frac{1}{2}$

2. Determina los valores de a que hacen cierta la expresión:

$$\frac{2}{2a^2-10a+12}$$

3. Plantea y resuelve:

   a) El producto de dos números consecutivos supera a su suma en 5 unidades. ¿Cuáles son esos números?.

   b) Calcula el perímetro y el valor de cada uno de los ángulos interiores de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 30 cm y 25 cm.

4. Obtiene la mínima expresión:

$$\sqrt{2}(x-\sqrt{2})^2-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}-4x}\right)^{-1}$$

Problema	1	2	3	4
Puntaje	40	15	30	15

AUTOEVALUACIÓN Nº 3

1. Encuentra los elementos de los siguientes conjuntos y represéntalos en el eje real

a) A = $\left\{x / \frac{3}{4}|x|+\frac{1}{4}\geq 1\right\}$ b) B = $\{x / x\neq 2; |x|<4\}$

2. Calcular expresando casa apartado con el denominador racionalizado

a) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ c) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$

b) $\sqrt{8}-2\sqrt{32}+3\sqrt{128}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{x}.\sqrt{x-1}}$

3. Resolver hasta la mínima expresión:

$$\frac{(a^2)^5.(b^{-6})^3\sqrt{b^9}}{(a^{-3})^{-2}(b^4)^0}$$

4. El perímetro de un rombo es de 160 cm y uno de sus ángulos interiores es de 120º. Calcula la medida de sus diagonales.

5. ¿Verdadero o falso?. Justifica.

$$\frac{b^{-1}+c^{-1}}{(cb)^{-1}} : \frac{2}{(b+c)^{-1}} = \frac{1}{2}$$

Problema	1	2	3	4	5
Puntaje	20	35	15	15	15

AUTOEVALUACIÓN Nº 4

1. Encuentra la medida de la base y la altura de un triángulo isósceles cuyo ángulo opuesto a la base es de 65º y sus lados congruentes miden cada uno 415 cm.

2. Determina analíticamente que valor o valores debe asumir α en cada caso:
   a. $\frac{1}{\alpha^2+6\alpha+5}$ esté definido en R
   b. $\sqrt{(-\alpha+1)(\alpha+2)}$ esté definido en R

3. Resuelve hasta obtener la mínima expresión:

$$\frac{r\sqrt{b}}{b^{-1}} + r.b^{\frac{1}{2}} - 3r\sqrt{b^3}$$

4. Un campo se ha sembrado la séptima parte de su superficie con trigo, la tercera parte de lo que queda con maíz y las 480 ha restantes con soja. ¿Cuántas ha tiene el campo?

5. ¿Para qué valores de x es cierta la expresión $\frac{3}{x^2-x}$?

Problema	1	2	3	4	5

Puntaje	20	20	20	20	20

A CONTINUACIÓN TE PROPONEMOS ALGUNOS EXÁMENES DE INGRESO:

EXAMEN 2006 -DICIEMBRE

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{x}{x-1}$ b) $\frac{2^{x+1}}{8^{x}}=\frac{1}{16}$

2. Determina el valor de k, para el cual la ecuación: $3x^2+(5k - 4)x + 3 = 0$, posea raíces opuestas.

3. Determina los valores de a; b y c para que sea cierta la siguiente igualdad:

$$\frac{\sqrt[3]{9x^5}.x.y^{-1}}{3.\left(x^3y\right)^{-2}}=3^a.x^b.y^c$$

4. Indica qué valores debe asumir la variable en cada caso, para que las siguientes expresiones resulten ciertas. Luego representa cada solución en distintos ejes reales.

a) $\sqrt[3]{\frac{7}{2x^3-8x}}$ b) $\sqrt{\frac{2x-4}{-5}}$

5. Plantea y resuelve:

a) En un restaurante ofrecen un menú económico a \$ 8 y un menú ejecutivo a \$ 15.Trece personas almorzaron juntas y gastaron \$ 146. ¿Cuántos eligieron el menú económico y cuántos el ejecutivo?.

b) La diagonal de un rectángulo es de 25 cm. Determina, en radianes el ángulo que ésta forma con la base, sabiendo que la altura del cuadrilátero es de 10 cm.

Ejercicio	1	2	3	4	5
Puntaje	20	10	15	25	30

EXAMEN 2006 - FEBRERO

1. Expresa los siguientes enunciados algebraicamente y obtiene el valor para:

$$p = -\frac{3}{2} \quad ; \quad q = 5$$

a) La suma del recíproco de p y el opuesto de q
b) Al cuadrado de p restarle el cuadrado de q

2. Resuelve la ecuación: $\frac{x^2}{x+1} - \frac{2}{2x+2} = 1$

3. Resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} y + x - 3 = 0 \\ x - 2(1 - y) = 2 \end{cases}$

4. Para que valores de x, está definida en el conjunto de los números reales cada una de las siguientes expresiones?

a) $\frac{1}{x^2 - 25x}$ b) $\sqrt{1 - 3x}$

5. Resuelve aplicando propiedades hasta la mínima expresión:

a) $\frac{\sqrt{\frac{x}{y}.x^{-1}}}{\sqrt[5]{\frac{1}{y}}}$ b) $\frac{1}{2}\sqrt{27} - \sqrt{12} + \frac{1}{5}\sqrt{3}$ c) $(a - \sqrt{3})^2 - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a^2 - 2a\right)$

6. Plantea y resuelve:

a) Calcula en radianes la medida de los ángulos interiores del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 cm y 8 cm respectivamente.

b) Determina el radio de una circunferencia, sabiendo que el ángulo central de $\frac{\pi}{5}$ radianes subtiende un arco de 20 cm.

Problema	1	2	3	4	5	6
Puntaje	10	15	10	20	30	15

Examen 2013

1. Plantea y resuelve:

Un pintor apoyó una escalera de 2,5 m contra la pared, de modo que el ángulo determinado por la escalera y el piso es de 65º. ¿a qué distancia de la pared está el pie de la escalera?

2. Determina el o los valores de la variable que hacen cierta cada una de las siguientes expresiones.

a) $\sqrt{-3x-\frac{1}{2}(x-1)}$

b) $\frac{1}{25x^3-100x^2}$

3. Calcula x: $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}=1$

4. ¿Verdadero o Falso?. Justifica.

a) $\left[\frac{\sqrt[5]{b^3}.\sqrt{b^{-1}}}{b^{-2}}\right]^{-2}=b^{-\frac{11}{5}}$

b) $|x|=5 \Rightarrow x=5$

5. Resuelve el sistema: $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ \dfrac{y+1}{x+3} = 5 \end{cases}$

Problema	1	2	3	4	5
Puntaje	15	20	20	20	25